

ძვირფასო სტუდენტებო,
 დავალების შესრულების დაწყებამდე,
 გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

**დავალება № 14 მაღალი რიგის წარმოებული. ფუნქციის დიფერენციალი.
 მარგინალური ანალიზის ელემენტები**

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 14-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1- ა,ბ	1- გ	2- ა	4- ა	4 ბ,გ,დ	5- ა,დ,ზ,ი	5- ბ,ე,თ,კ	6	7	8	10	11
12	13	14	15								

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

1-ა, ბ. იპოვეთ $\frac{d^2y}{dx^2}$, თუ: ა) $y = 7x^2 - x$; ბ) $y = \frac{1}{x^2}$.

ამოხსნა

ა) $\frac{dy}{dx} = (7x^2 - x)' = 14x - 1$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = (14x - 1)' = 14$;

ბ) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = (-2x^{-3})' = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$;

პასუხი

ა) $\frac{d^2y}{dx^2} = 14$; ბ) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{x^4}$.

4-ა. იპოვეთ $y = \frac{2-x^2}{3x^2+1}$ ფუნქციის დიფერენციალი.

ამოხსნა

$$dy = y' dx = \left(\frac{2-x^2}{3x^2+1}\right)' dx = \frac{(2-x^2)' \cdot (3x^2+1) - (2-x^2) \cdot (3x^2+1)'}{(3x^2+1)^2} dx;$$

$$dy = \frac{-2x \cdot (3x^2+1) - (2-x^2) \cdot 6x}{(3x^2+1)^2} dx = \frac{-6x^3 - 2x - 12x + 6x^3}{(3x^2+1)^2} dx = \frac{-14x}{(3x^2+1)^2} dx.$$

პასუხი

$$dy = \frac{-14x}{(3x^2+1)^2} dx.$$

5-ა, დ, ზ, ი. ლოპიტალის წესის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

$$\text{ა) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}; \quad \text{დ) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}; \quad \text{ზ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt[3]{x+8}-2}; \quad \text{ი) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3\sin x - \cos 3x}{\sin 4x}.$$

ამოხსნა

ა) რადგან $x^2 - 1 = 0$ და $x^2 - 3x + 2 = 0$, როცა $x = 1$, ამიტომ ლოპიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)'}{(x^2-3x+2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{2x-3} = \frac{2}{2-3} = -2;$$

დ) რადგან გვაქვს $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობა, ამიტომ ლოპიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^5-3x^2+8)'}{(2x^5+2x-1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^4-6x}{10x^4+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(20x^4-6x)'}{(10x^4+2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{80x^3-6}{40x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(80x^3-6)'}{(40x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{240x^2}{120x^2} = \frac{240}{120} = 2;$$

ზ) რადგან გვაქვს $\frac{0}{0}$ ტიპის განუზღვრელობა, ამიტომ ლოპიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt[3]{x+8}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)'}{(\sqrt[3]{x+8}-2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+9}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+8)^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{(x+8)^2}}{2\sqrt{x+9}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}}{2 \cdot \sqrt{9}} = \frac{12}{6} = 2;$$

ი) რადგან გვაქვს $\frac{0}{0}$ ტიპის განუზღვრელობა, ამიტომ ლოპიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3\sin x - \cos 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3\sin x - \cos 3x)'}{(\sin 4x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x + 3\sin 3x}{4\cos 4x} = \frac{3}{4}.$$

პასუხი

ა) -2 ; დ) 2 ; ზ) 2 ; ი) $\frac{3}{4}$.

6. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = 60 - Q$.

ა) მოძებნეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისა და მისი შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქციის გამოსახულებები;

ბ) გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, როცა $Q = 50$;

გ) იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, თუ მოთხოვნა იზრდება $Q = 50$ -დან $Q = 51$ - მდე და შეადარეთ იგი მარგინალური ამონაგების მნიშვნელობას $Q = 50$ ერთეულზე.

ამოხსნა

ა) $TR = p \cdot Q = (60 - Q) \cdot Q = 60Q - Q^2$; $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = (60Q - Q^2)' = 60 - 2Q$;

ბ) $MR(50) = 60 - 2 \cdot 50 = -40$;

გ) $\Delta(TR) \approx MR \cdot \Delta Q = MR(50) \cdot (51 - 50) = -40$;

$\Delta(TR) = TR(51) - TR(50) = 60 \cdot 51 - 51^2 - 60 \cdot 50 + 50^2 = 60 - 101 = -41$;

პასუხი

ა) $TR = 60Q - Q^2$; $MR = 60 - 2Q$; ბ) $MR(50) = -40$; გ) $\Delta(TR) \approx -40$; $\Delta(TR) = -41$.

7. მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა $TR = 300Q - 2Q^2$.

ა) რას უდრის მარგინალური ამონაგების ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $Q = 25$;

ბ) გამოთვალეთ ამონაგების ფუნქციის ცვლილება მოთხოვნის $\Delta Q = 5$ ერთეულით გაზრდისას, თუ მოცემულ მომენტში მოთხოვნაა $Q = 25$ ერთეული.

ამოხსნა

ა) $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = (300Q - 2Q^2)' = 300 - 4Q$; $MR(25) = 300 - 4 \cdot 25 = 200$;

ბ) $\Delta(TR) \approx MR \cdot \Delta Q = MR(25) \cdot 5 = 200 \cdot 5 = 1000$.

პასუხი

ა) $MR(25) = 200$; ბ) $\Delta(TR) \approx 1000$.

10. საწარმოს მუდმივი დანახარჯია $FC = 400$ ლ., ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე $- VC = 4$ ლ.

ა) იპოვეთ მთლიანი და მარგინალური დანახარჯები;

ბ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, როცა $Q = 40$;

გ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილება, თუ მოთხოვნა გაიზარდა 40 ერთეულიდან 43 ერთეულამდე.

ამოხსნა

$$ა) TC = FC + Q \cdot VC = 400 + 4Q ; MC = \frac{d(TC)}{dQ} = (400 + 4Q)' = 4 ;$$

$$ბ) TC(40) = 400 + 4 \cdot 40 = 560;$$

$$გ) \Delta(TC) \approx MC \cdot \Delta Q = MC(40) \cdot (43 - 40) = 4 \cdot 3 = 12 .$$

პასუხი

$$ა) TC = 400 + 4Q ; MC = 4 ; ბ) TC(40) = 560 ; გ) \Delta(TC) \approx 12 .$$

13. წარმოების მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $K(Q) = 0,03Q^2 - 2Q + 300$. იპოვეთ საშუალო დანახარჯისა და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციების მნიშვნელობები, როცა $Q = 50$ და $Q = 100$.

ამოხსნა

$$AK = \frac{K(Q)}{Q} = \frac{0,03Q^2 - 2Q + 300}{Q} = 0,03Q - 2 + \frac{300}{Q} ;$$

$$AK(50) = 0,03 \cdot 50 - 2 + \frac{300}{50} = 5,5 ; AK(100) = 0,03 \cdot 100 - 2 + \frac{300}{100} = 4 ;$$

$$MK = \frac{d(K(Q))}{dQ} = (0,03Q^2 - 2Q + 300)' = 0,06Q - 2 ; MK(50) = 0,06 \cdot 50 - 2 = 1 ; MK(100) = 0,06 \cdot 100 - 2 = 4 .$$

პასუხი

$$AK(50) = 5,5 ; AK(100) = 4 ; MK(50) = 1 ; MK(100) = 4 .$$

